10-3 المسافة ونقاط المنتصف

السابق
- أنشأت تمثيلا بيانيًا للنقاط على المستوى الإحداثي.

الحالي
1 إيجاد المسافة بين نقطتين.
2 إيجاد نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.

لماذا؟
- يُحدد موقع مدينة ما على الخريطة بدرجات خطي العرض والطول. وفيما يتعلق بالمسافات القصيرة، فإنه يمكن استخدام نظرية فيثاغورث لتقريب المسافة بين موقعين.

المفردات الجديدة

المسافة distance
عدد غير نسبي irrational number
نقطة المنتصف midpoint
منصف قطعة مستقيمة segment bisector

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 المسافة بين نقطتين **المسافة** بين نقطتين هي طول القطعة المستقيمة التي تمثل هاتان النقطتان نقطتي النهاية لها. ويمكن استخدام إحداثيي النقطتين لإيجاد هذا الطول. ولأن طول $\overline{PQ}$ هو نفس طول $\overline{QP}$، فإن الترتيب الذي تعين به نقطتي النهاية ليس ضروريًا عند حساب المسافة.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة (على خط الأعداد)

الشرح المسافة بين نقطتين هي القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثيات الخاصة بهما.

الرموز إذا كانت P لها الإحداثي x_1 و Q لها الإحداثي x_2، فإن $PQ = |x_2 - x_1|$ أو $|x_1 - x_2|$.

مثال 1 إيجاد المسافة على خط الأعداد

استخدم خط الأعداد لإيجاد BE.

إحداثيا النقطتين B و E يساويان -6 و 2.

$BE = |x_2 - x_1|$ صيغة المسافة
$= |2 - (-6)|$ $x_2 = 2$ و $x_1 = -6$
$= 8$ بسّط.

تمرين موجّه

استخدم خط الأعداد السابق لإيجاد كل قياس.

1A. AC 3 **1B.** CF 9 **1C.** FB 11

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لمكغرو هيل للتعليم

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 10-3 استخدام النقاط المُمثّلة بيانيًا على المستوى الإحداثي.

الدرس 10-3 إيجاد المسافة بين نقطتين. وإيجاد نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة.

بعد الدرس 10-3 استخدام المسافات ونقاط المنتصف في حل مسائل وكتابة براهين هندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- هناك خط طول 60′ في 1° وخط عرض 60′ في 1°. فما إحداثيات كل من أورلاندو وميامي بالدرجات؟ أورلاندو: 23.55° شمالي، 81.38° غربي؛ ميامي: 25.8° شمالي، 80.27° غربي
- ما طول كل ساق من المثلث الظاهر على يمين الخريطة بالدرجات؟ الساق الطويلة: 2.25°؛ والساق القصيرة: 1.11°
- استخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد المسافة بالدرجات بين أورلاندو وميامي. ≈2.51°

(يُتبع في الصفحة التالية)

- لماذا يتعين قياس أطوال أضلاع المثلث والمسافة بين أورلاندو وميامي بالدرجات على وجه التحديد؟ يتعين قياس أطوال أضلاع المثلث والمسافة بين أورلاندو وميامي بالدرجات على وجه التحديد لأن الإحداثيات المستخدمة لاستنتاج الأطوال معطاة بالدرجات. ومن الضروري أن نشير إلى أنه يتم نقل المساحة الصغيرة لخريطة فلوريدا على مستوى إحداثي بحيث يمكن تطبيق حسابات الشكل الإحداثي ثنائي الأبعاد باستخدام نظرية فيثاغورث على المواقع (المشار إليها بالدرجات على خطوط الطول والعرض) التي تقع بالفعل على كرة جغرافية (الأرض).

1 المسافة بين نقطتين

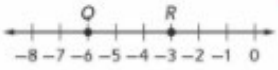
المثال 1 يوضح طريقة إيجاد المسافة بين نقطتين على خط أعداد. و**المثال 2** يُبين طريقة استخدام نظرية فيثاغورث أو صيغة المسافة لإيجاد المسافة بين نقطتين على مستوى إحداثي.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

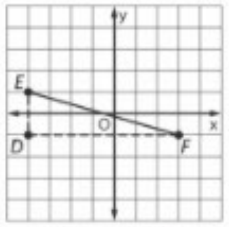
أمثلة إضافية

1 استخدم خط الأعداد لإيجاد QR.



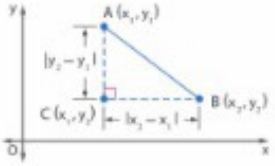
3

2 أوجد المسافة بين $E(-4, 1)$ و $F(3, -1)$.



$\sqrt{53} \approx 7.28$

لإيجاد المسافة بين النقطتين A و B في المستوى الإحداثي، فإنه يمكنك إنشاء مثلث قائم الزاوية على أن يكون $\overline{AB}$ هو وتر المثلث والنقطة C هي رأسه كما هو موضح. ثم استخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد AB.



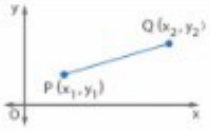
$(CB)^2 + (AC)^2 = (AB)^2$	نظرية فيثاغورث
$(\lvert x_2 - x_1 \rvert)^2 + (\lvert y_2 - y_1 \rvert)^2 = (AB)^2$	$CB = \lvert x_2 - x_1 \rvert, AC = \lvert y_2 - y_1 \rvert$
$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (AB)^2$	يكون تربيع العدد دائمًا موجبًا.
$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB$	خذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف.

هذا يعطينا صيغة مسافة للنقاط الموجودة في المستوى الإحداثي. ولأن هذه الصيغة تتضمن أخذ الجذر التربيعي لعدد حقيقي، فقد تكون المسافات غير نسبية. تذكر أن **العدد غير النسبي** هو عدد لا يمكن التعبير عنه في صورة كسر عشري منته أو متكرر.

المفهوم الأساسي صيغة المسافة (في المستوى الإحداثي)

إذا كانت النقطة P لها الإحداثيان (x_1, y_1) والنقطة Q لها الإحداثيان (x_2, y_2)، فإن

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



ترتيب الإحداثيين x و y في كل مجموعة أقواس ليس ضروريًا.

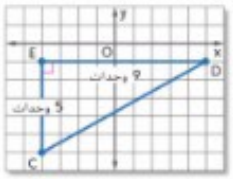
مثال 2 إيجاد المسافة على المستوى الإحداثي

أوجد المسافة بين $C(-4, -6)$ و $D(5, -1)$.

$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	صيغة المسافة
$= \sqrt{[5 - (-4)]^2 + [-1 - (-6)]^2}$	$(x_2, y_2) = (5, -1)$ و $(x_1, y_1) = (-4, -6)$
$= \sqrt{9^2 + 5^2}$ أو $\sqrt{106}$	اطرح.

المسافة بين C و D تساوي $\sqrt{106}$ وحدات. استخدم الحاسبة لإيجاد أن $\sqrt{106}$ وحدات تساوي تقريبًا 10.3 وحدات.

التحقق مثّل بيانيًا الأزواج المرتبة وتحقق باستخدام نظرية فيثاغورث.



$(CD)^2 \stackrel{?}{=} (EC)^2 + (ED)^2$

$(CD)^2 \stackrel{?}{=} 5^2 + 9^2$

$(CD)^2 \stackrel{?}{=} 106$

$CD = \sqrt{106}$ ✓

تمرين موجّه

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط.

2A. $E(-5, 6)$ و $F(8, -4)$ $\sqrt{269}$ أو حوالي 16.4 وحدة

2B. $J(4, 3)$ و $K(-3, -7)$ $\sqrt{149}$ أو حوالي 16.4 وحدة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إرشاد للمعلمين الجدد

إيجاد المسافة شجع الطلاب على استخدام نظرية فيثاغورث لاستنتاج المسافة بين نقطتين عدة مرات قبل التطرق إلى صيغة المسافة. وغالبًا ما يجد الطلاب صعوبة في تذكر صيغة المسافة، ويمنحهم هذا بديلاً لإيجاد المسافة بين نقطتين.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

المدونة على مَدونة الصف الآمنة، كلف الطلاب بكتابة تدوينة لشرح وجه التشابه بين صيغة المسافة ونظرية فيثاغورث.

2 نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة

نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة هي نقطة في منتصف المسافة بين نقطتي النهاية لهذه القطعة. وتوضح **الأمثلة 3–6** كيفية إيجاد نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة حسابيًا وجبريًا على خط أعداد وعلى مستوى إحداثي.

مثال إضافي

3 **الديكور** يضع راشد أريكة بحيث يكون طرفها عموديًا ويبعد عن الحائط بمسافة 76.2 سنتيمترًا. وعرض هذه الأريكة 228 سنتيمترًا. فكم تبعد نقطة منتصف الجزء الخلفي لهذه الأريكة عن الحائط بالمتر؟

1.91 m

إرشاد للمعلمين الجدد

صيغة نقطة المنتصف ربما ترغب في جعل الطلاب يبتكرون صيغ خاصة بهم لنقطة المنتصف عن طريق اختبار عدة أمثلة.

انتبه!

تصحيح المفاهيم الخاطئة

تكمن أحد الأخطاء الشائعة في أن يطرح الطلاب الإحداثيات في صيغة نقطة المنتصف لأن الطرح يُستخدم في صيغتي المسافة والميل. ذكّر الطلاب بأن نقطة المنتصف هي وسط كل إحداثي. ولإيجاد هذا الوسط أو المتوسط، تتم قسمة المجموع على عدد الحدود.

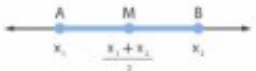
2 نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة

إن **نقطة المنتصف** للقطعة المستقيمة هي النقطة التي تقع في المنتصف بين نقطتي النهاية للقطعة المستقيمة. وإذا كانت X هي نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن $AX = XB$ و $\overline{AX} \cong \overline{XB}$. ويمكنك إيجاد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة على خط الأعداد عن طريق إيجاد الوسط أو المتوسط الخاص بإحداثيات نقطتي نهايتها.

المفهوم الأساسي صيغة نقطة المنتصف (على خط الأعداد)

إذا كانت $\overline{AB}$ لها نقطتا نهاية عند x_1 و x_2 على خط الأعداد، فإن نقطة المنتصف M للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ يكون لها الإحداثي

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$



مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد نقطة المنتصف على خط الأعداد

الديكور تعلّق هناء صورة على بعد 15 سنتيمترًا من الجانب الأيسر لأحد الحوائط. فكم المسافة من حافة الحائط التي ينبغي أن تضع عندها علامة لموضع المسمار الذي سيعلق عليه الصورة إذا كانت الحافة اليمنى تبعد بمقدار 37.5 سنتيمترًا من الجانب الأيسر للحائط؟

تبلغ إحداثيات نقطتي النهاية لإطار الصورة من الأعلى 15 سنتيمترًا و 37.5 سنتيمترًا. لنفترض أن M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

$$M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= \frac{15 + 37.5}{2}$$ $x_1 = 15,\ x_2 = 37.5$

$$= \frac{52.5}{2} \text{ أو } 26.25$$ بتبسيط.

تقع نقطة المنتصف عند 26.25 أو $26\frac{1}{4}$ سنتيمتر من يسار حافة الحائط.

تمرين موجّه

3. **درجة الحرارة** انخفضت درجة الحرارة على مقياس حرارة من قراءة تبلغ 25° إلى −8°. أوجد نقطة المنتصف لدرجتي الحرارة هاتين. **8.5°**

نصيحة دراسية

طريقة بديلة

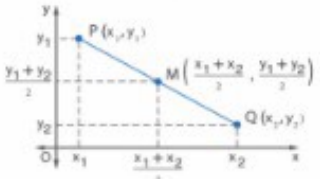
في المثال 3، من الممكن أن يكون إحداثي نقطة المنتصف قد خده أيضًا أولاً من طريق إيجاد طول القطعة المستقيمة AB، وهو يساوي 15 − 37.5 أو 22.5 سنتيمترًا. ويكون نصف هذا القياس هو المسافة من إحدى نقطتي النهاية إلى نقطة المنتصف بين A و B، $\frac{22.5}{2}$ أو 25.11. أضف هذه المسافة إلى مسافة النقطة A من يسار الحائط. إذًا، نقطة المنتصف بين A و B تساوي 15 + 11.25 أو 26.25 سنتيمترًا من يسار الحائط.

يمكنك إيجاد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة على المستوى الإحداثي عن طريق إيجاد متوسط الإحداثيين x والإحداثيين y لنقطتي النهاية.

المفهوم الأساسي صيغة نقطة المنتصف (في المستوى الإحداثي)

إذا كانت $\overline{PQ}$ لها نقطتا نهاية عند $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ في المستوى الإحداثي، فسيكون لنقطة المنتصف M للقطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ الإحداثيان

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



عند إيجاد نقطة منتصف لقطعة مستقيمة، فإن ترتيب إحداثيات نقطتي النهاية لا يكون ضروريًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسع كلف الطلاب برسم ثلاث قطع مستقيمة مختلفة بحيث تكون النقطة (0, 0) هي نقطة المنتصف لكل منها. واكتب إحداثيات نقطتي النهاية لكل منها. ماذا تلاحظ بشأن هذه الإحداثيات؟

الإجابة النموذجية: في كل زوج، تكون إحداثيات x وإحداثيات y متقابلة.

إرشاد للمعلمين الجدد

استخدام الرموز اشرح وبيّنْ أن قطعة مستقيمة بها النقاط A و B و C وعلامات على كل من القطعتين المشتقتين AB و BC تشير إلى أن B هي نقطة *المنتصف* ومُنصفة للقطعة $\overline{AC}$.

أمثلة إضافية

4 أوجد إحداثيي النقطة M، وهي نقطة منتصف القطعة GH، مع الوضع في الاعتبار أن نقطتي هذه القطعة هما $G(8, -6)$ و $H(-14, 12)$. $(-3, 3)$

5 أوجد إحداثيي النقطة D إذا علمتَ أن $E(-6, 4)$ هي نقطة منتصف $\overline{DF}$ وأن إحداثيي F هما $(-5, -3)$. $(-7, 11)$

التركيز على محتوى الرياضيات

جمع القطع المستقيمة عادة ما يتم توضيح عملية جمع القطع المستقيمة بترتيب النقاط. كما هو الحال في $AB + BC = AC$. ومع ذلك، فإنه نظرًا لأن الجمع تبادلي، فإن عملية الجمع $BC + AB = AC$ تكون صحيحة أيضًا.

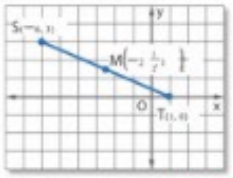
مثال 4 إيجاد نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

أوجد إحداثيي M، وهي نقطة منتصف للقطعة المستقيمة $\overline{ST}$، مع مراعاة $S(-6, 3)$ و $T(1, 0)$.

$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= \left(\frac{-6 + 1}{2}, \frac{3 + 0}{2}\right)$ $(x_1, y_1) = S(-6, 3), (x_2, y_2) = T(1, 0)$

$= \left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ أو $M\left(-2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$ بسّط.



التحقق مثّل بيانيًا S و T و M. المسافة من S إلى M يبدو أنها تنص المسافة من M إلى T، إذًا، إجابتنا صحيحة.

تمرين موجّه

حدّد إحداثيي نقطة المنتصف في قطعة مستقيمة باستخدام الإحداثيات المعطاة.

4A. $A(5, 12), B(-4, 8)$ $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$

4B. $C(-8, -2), D(5, 1)$ $\left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

يمكنك أيضًا إيجاد إحداثيي نقطة النهاية لقطعة مستقيمة إذا كنت تعرف إحداثيات نقطة نهايتها الأخرى ونقطة منتصفها.

مثال 5 إيجاد إحداثيي نقطة منتصف

أوجد إحداثيي J إذا كانت $K(-1, 2)$ هي نقطة منتصف $\overline{JL}$ و L لها الإحداثيان $(3, -5)$.

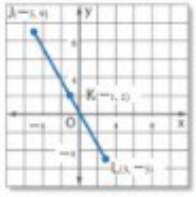
الخطوة 1 لنفترض أن J هي (x_1, y_1) و L هي (x_2, y_2) في صيغة نقطة المنتصف.

$K\left(\frac{x_1 + 3}{2}, \frac{y_1 + (-5)}{2}\right) = K(-1, 2)$ $(x_2, y_2) = (3, -5)$

الخطوة 2 اكتب معادلتين لإيجاد إحداثيي J.

$\frac{x_1 + 3}{2} = -1$ صيغة نقطة المنتصف	$\frac{y_1 + (-5)}{2} = 2$ صيغة نقطة المنتصف
$x_1 + 3 = -2$ اضرب كل طرف في 2.	$y_1 - 5 = 4$ اضرب كل طرف في 2.
$x_1 = -5$ اجمع 3 إلى كل طرف.	$y_1 = 9$ اطرح 5 من كل طرف.

إحداثيا J هما $(-5, 9)$.



التحقق مثل بيانيًا J و K و L. المسافة من J إلى K يبدو أنها تنص المسافة من K إلى L، إذًا، إجابتنا صحيحة.

تمرين موجّه

أوجد إحداثيي النقطة الطرفية الناقصة إذا كانت P هي نقطة منتصف $\overline{EG}$.

5A. $E(-8, 6), P(-5, 10)$ $G(-2, 14)$

5B. $P(-1, 3), G(5, 6)$ $E(-7, 0)$

نصيحة دراسية

التحقق من مدى صحة الحل

اعرض دومًا على التمثيل البياني للمعلومات المعطاة والإحداثيات المحسوبة للنقطة الثالثة للتحقق من مدى صحة إجابتك.

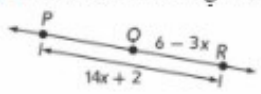
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني ارفع مسطرة مترية لأعلى حتى يراها الطلاب بحيث يكون الجانب المُدرج بعيدًا عنهم. واطلب من متطوع منهم أن يضع علامة على ظهرها في النقطة التي يرونها تقريبًا نقطة المنتصف. كلف متطوعًا ثانيًا بالتحقق من العلامة التي وضعها الطالب الأول أو إضافة علامة أخرى. ضع قلمًا بحيث يكون عموديًا على العلامة 50 cm بحيث يُبين تمامًا مكان نقطة منتصف العصا. وقارن ذلك بعلامتي الطالبين. اشرح كيف يمكن للأشخاص استخدام مهارات مكانية لتحديد منتصف العديد من الأشياء بشكل دقيق.

مثال إضافي

6 **الجبر** أوجد قياس $\overline{PR}$ إذا علمت أن Q هي نقطة منتصف $\overline{PR}$. 9



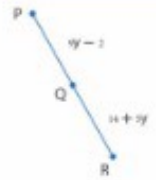
يمكن استخدام الجبر لإيجاد القياس أو القيمة المفقودة في الشكل الذي يتضمن نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

مثال 6 استخدام الجبر لإيجاد القياسات

الجبر **أوجد قياس $\overline{PQ}$ إذا كانت Q هي نقطة منتصف $\overline{PR}$.**

الفهم تعرف أن Q هي نقطة منتصف $\overline{PR}$.
والمطلوب إيجاد قياس $\overline{PQ}$.

التخطيط نظرًا لأن Q هي نقطة المنتصف. فأنت تعرف أن $PQ = QR$. استخدم هذه المعادلة لإيجاد قيمة y.



الحل

تعريف نقطة المنتصف

$PQ = QR$

$PQ = 9y - 2,\ QR = 14 + 5y$

$9y - 2 = 14 + 5y$

اطرح $5y$ من كل طرف.

$4y - 2 = 14$

اجمع 2 إلى كل طرف.

$4y = 16$

اقسم كل طرف على 4.

$y = 4$

الآن استبدل 4 مكان y في التعبير الخاص بـ PQ.

القياس الأصلي

$PQ = 9y - 2$

$y = 4$

$= 9(4) - 2$

بسّط.

$= 36 - 2$ أو 34

قياس $\overline{PQ}$ يساوي 34.

التحقق بما أن $PQ = QR$، فإنه عند إيجاد قيمة التعبير الخاص بـ QR عند 4، فينبغي أن يساوي أيضًا 34.

القياس الأصلي

$QR = 14 + 5y$

$y = 4$

$\stackrel{?}{=} 14 + 5(4)$

بسّط.

$= 34$ ✔

تمرين موجّه

6A. أوجد قياس $\overline{YZ}$ إذا كانت Y هي نقطة منتصف $\overline{YZ}$، و $XY = 2x - 3$، و $YZ = 27 - 4x$. 7

6B. أوجد قيمة x إذا كانت C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$، و $AC = 4x + 5$، و $AB = 78$. 8.5

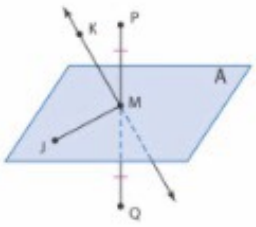
نصيحة دراسية

التبرير المنطقي والمثابرة تعد الخطة المكونة من أربع خطوات لحل المسائل أداة لفهم طبيعة أي مسألة. وعند عمل الخطة وتنفيذها، اسأل نفسك دومًا، "هل هذه الخطة منطقية؟" راقب تقدمك وقيّمه وغيّر المسار إذا لزم الأمر.

نصيحة دراسية

منصفات القطع المستقيمة قد يوجد عدد لا نهائي للمنصفات وكل منصف يجب أن يحتوي على نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة.

يطلق على أي قطعة مستقيمة أو مستقيم أو مستوى يتقاطع مع قطعة مستقيمة أخرى عند نقطة منتصفها اسم **منصف القطعة المستقيمة**. في الشكل على اليسار، تعد M هي نقطة منتصف $\overline{PQ}$.



المستوى A و $\overleftrightarrow{MJ}$ و $\overleftrightarrow{KM}$ والنقطة M جميعها منصفات $\overline{PQ}$ إننا نقول إنها "منصف $\overline{PQ}$".

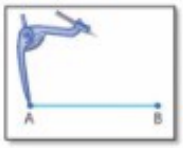
الإنشاء في الصفحة التالية يوضح طريقة إنشاء خط مستقيم ينصّف قطعة مستقيمة لإيجاد نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة محددة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

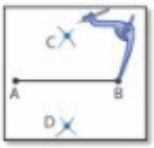
585

الإنشاء تنصيف قطعة مستقيمة

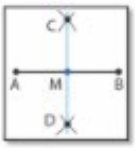
الخطوة 1 ارسم قطعة مستقيمة وسمّها $\overline{AB}$. ضع الفرجار عند النقطة A. اضبط الفرجار بحيث يكون مرضه أكبر من $\frac{1}{2}AB$. ارسم قوسين فوق $\overline{AB}$ وتحتها.



الخطوة 2 باستخدام وضعية الفرجار ذاتها، ضع الفرجار عند النقطة B وارسم قوسين فوق وتحت $\overline{AB}$ بحيث يتقاطعان مع القوسين المرسومين مسبقًا. سمِّ نقطتي تقاطع الأقواس بـ C و D.



الخطوة 3 استخدم مسطرة تقويم لرسم القطعة المستقيمة $\overline{CD}$. سمِّ النقطة التي تتقاطع عندها مع $\overline{AB}$ باسم M. وتكون النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$، و $\overline{CD}$ هو منصف $\overline{AB}$.

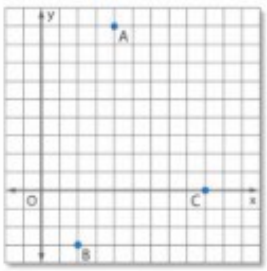


التحقق من فهمك

مثال 1 استخدم خط الأعداد في إيجاد كل قياس.

1. XY **8**
2. WZ **9**

مثال 2 **صندوق المحتويات الزمنية** دفنت فصول التخرج صناديق المحتويات الزمنية في حرم مدرسة إيست سايد الثانوية على مدار عشرين عامًا. وتوضح النقاط الموجودة في الرسم التخطيطي مكان ثلاثة صناديق منها. أوجد المسافة بين كل زوج من هذه الصناديق.



3. $A(4, 9), B(2, -3)$ **$\sqrt{148}$ أو حوالي 12.2 وحدة**
4. $A(4, 9), C(9, 0)$ **$\sqrt{106}$ أو حوالي 10.3 وحدات**
5. $B(2, -3), C(9, 0)$ **$\sqrt{58}$ أو حوالي 7.6 وحدات**
6. **التبرير** أي صندوقين من صناديق المحتويات الزمنية هذه الأقرب إلى بعضهما البعض؟ وأيهما الأبعد؟ **الأقرب: B و C؛ الأبعد: A و B**

مثال 3 استخدم خط الأعداد لإيجاد إحداثي نقطة المنتصف لكل قطعة مستقيمة.

7. $\overline{AC}$ **−3**
8. $\overline{BD}$ **9**

مثال 4 أوجد إحداثي نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة باستخدام النقطتين الطرفيتين المحددتين.

9. $J(5, -3), K(3, -8)$ **(4, −5.5)**
10. $M(7, 1), N(4, -1)$ **(5.5, 0)**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 12 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

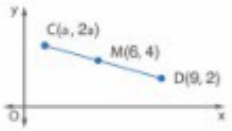
22. 5 وحدات
23. $\sqrt{208}$ أو حوالي 14.4 وحدة
24. $\sqrt{200}$ أو حوالي 14.1 وحدة
25. $\sqrt{65}$ أو حوالي 8.1 وحدات
26. $\sqrt{20}$ أو حوالي 4.5 وحدات
27. $\sqrt{53}$ أو حوالي 7.3 وحدات
28. $\sqrt{37}$ أو حوالي 6.1 وحدات
29. $\sqrt{18}$ أو حوالي 4.2 وحدات
30. $\sqrt{29}$ أو حوالي 5.4 وحدات

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	13–56, 68, 69, 71–86	13–55 فردي، 73–76	14–56 زوجي، 64–69, 71, 72,, 77–86
OL أساسي	13–55 فردي، 57–60 61–65 فردي، 66–69 71–86	13–56, 73–76	57–69, 71, 72, 77–86
BL متقدم	57–81 (اختياري: 82–86)		

مثال 5 11. أوجد إحداثيي G إذا كانت $F(1, 3.5)$ هي نقطة منتصف $\overline{GJ}$ و J لها الإحداثيان $(6, -2)$. $(-4, 9)$

مثال 6 12. **الجبر** النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{CD}$، فما قيمة a في الشكل؟ **3**



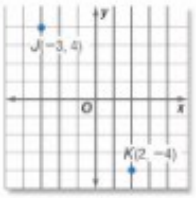
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **استخدم خط الأعداد في إيجاد كل قياس.**

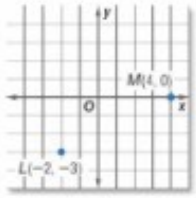
13. JL **5**
14. JK **3**
15. KP **9**
16. NP **2**
17. JP **12**
18. LN **5**

مثال 2 **أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط. 30–22. انظر الهامش.**

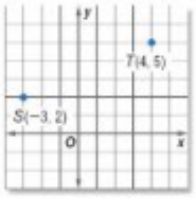
19. $\sqrt{89}$ أو حوالي 9.4 وحدات
20. $\sqrt{45}$ أو حوالي 6.7 وحدات
21. $\sqrt{58}$ أو حوالي 7.6 وحدات



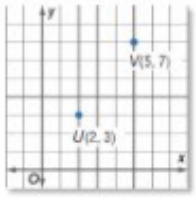
20.



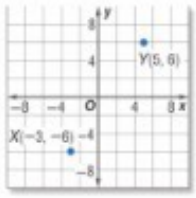
21.



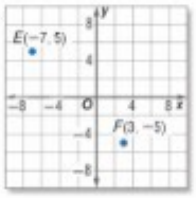
22.



23.

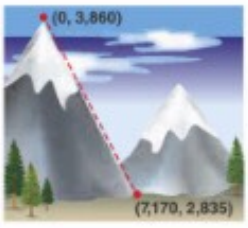


24.



25. $X(1, 2), Y(5, 9)$
26. $P(3, 4), Q(7, 2)$
27. $M(-3, 8), N(-5, 1)$
28. $Y(-4, 9), Z(-5, 3)$
29. $A(2, 4), B(5, 7)$
30. $C(5, 1), D(3, 6)$

31. **التبرير** تخطط هدى لأن تصعد إلى أعلى قمة جبل خلال عطلة عائلتها. وتم توضيح إحداثيات قمة الجبل وإحداثيات قاعدة المسار. فإذا كان من الممكن تقريب المسار باستخدام خط مستقيم، فقدر طول المسار. (ملاحظة: 1 km = 1000 m) **7.24 km**



محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

B 57. **كرة السلة** أبعاد ملعب كرة سلة موضحة فيما يلي. افترض أن اللاعب يرمي الكرة من أحد الأركان إلى زميل له في منتصف الملعب.

a. فإذا كان منتصف الملعب يوجد عند نقطة الأصل، فأوجد الزوج المرتب الذي يمثل موقع اللاعب في الركن المقابل الأيمن. (14.3, 7.6)

b. أوجد المسافة التي تقطعها الكرة. ≈16.2 m

الأدوات يمكن استخدام أوراق بيانات لإجراء العمليات الحسابية سريعًا. ويمكن استخدام ورقة البيانات التالية لحساب المسافة بين نقطتين. وتُستخدم القيم في الصيغ عن طريق استخدام اسم معين للخلية. وتُستخدم قيمة x_1 في إحدى الصيغ باستخدام اسم خليتها. A2.

اكتب صيغة للخلية المشار إليها بحيث يمكن استخدامها لحساب القيمة المبينة باستخدام الإحداثيات (x_1, y_1) و (x_2, y_2) لتكون النقطة الطرفية لقطعة مستقيمة.

58. E2: قيمة x لنقطة منتصف القطعة المستقيمة = AVERAGE(A2,C2)

59. F2: قيمة y لنقطة منتصف القطعة المستقيمة = AVERAGE(B2,D2)

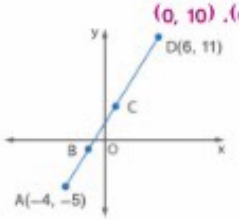
60. G2: طول القطعة المستقيمة = SQRT((C2-A2)^2+(D2-B2)^2)

ضع اسمًا للنقطة (النقاط) التي تتفق مع الحالة المعطاة.

61. النقطتان على المحور الأفقي x اللتان تساويان 10 وحدات من (1, 8) (7, 0)، (−5, 0)

62. النقطتان على المحور الرأسي y اللتان تساويان 25 وحدة من (−24, 3) (0, 10)، (0, −4)

C 63. **الهندسة الإحداثية** أوجد إحداثيي النقطة B إذا كانت B هي نقطة منتصف $\overline{AC}$ والنقطة C هي نقطة منتصف $\overline{AD}$. $\left(-1\frac{1}{2}, -1\right)$



الجبر حدد قيمة (قيم) n.

64. $J(n, n+2)$, $K(3n, n-1)$, $JK = 5$ ±2

65. $P(3n, n-7)$, $Q(4n, n+5)$, $PQ = 13$ ±5

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المتابعة

استكشف الطلاب القياسات الخطية والمسافة ونقاط المنتصف.

اطرح السؤال التالي:

- كيف تُقاس وتُصنف القطع المستقيمة؟
  الإجابة النموذجية: يمكن قياس القطع المستقيمة باستخدام مسطرة في الوحدات الخطية مثل السنتيمترات، أو باستخدام صيغة المسافة إذا كانت على المستوى الإحداثي. وتكون القطع المستقيمة ذات القياس نفسه متطابقة.
- متى نستخدم صيغتي المسافة ونقطة المنتصف؟ الإجابة النموذجية: تُستخدم صيغة المسافة لإيجاد المسافة بين نقطتين. بينما تُستخدم صيغة نقطة المنتصف لإيجاد النقطة الواقعة في المنتصف بين نقطتي النهاية لقطعة مستقيمة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

ورق البيانات أخبر الطلاب بأن ورق البيانات غالبًا ما يستخدم أوامر خاصة لتنفيذ عملية معينة. فعلى سبيل المثال، سنكتب $\sqrt{x_2 - x_1}$ في صورة SQRT(A2-C2). ولإيجاد متوسط الأعداد في مجموعة من الخلايا، استخدم الأمر AVERAGE (متوسط مجموعة من الخلايا). واستخدم الرمز ^ لرفع عدد إلى قوة أسية.

589

ملاحظات لحل التمرين

الإنترنت أم أطلس يطلب التمرين 66 استخدام الإنترنت أو أطلس.

المسطرة يتطلب التمرين 67 استخدام مسطرة.

فرجار ومسطرة تقويم يتطلب التمرين 71 استخدام فرجار ومسطرة تقويم.

التمثيلات المتعددة

في التمرين 67. يستخدم الطلاب أشكالاً هندسية وجدولاً وتعابير جبرية لاستكشاف وتخمين العلاقة بين نقطة المنتصف الخاصة بالقطعة المستقيمة ونقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الموجودة بين نقطة النهاية ونقطة المنتصف.

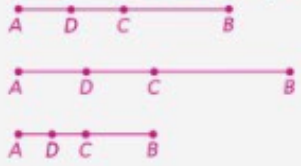
إرشاد للمعلمين الجدد

التحدي قد ترغب في استخدام إحدى مسائل "التحدي". مثل التمرين 70. ليكون بمثابة تمرين لبدء أعمال الصف في اليوم التالي لشرح الدرس. ويكون ذلك بمثابة افتتاحية لمناقشة الواجب المنزلي أو للانتقال إلى الدرس التالي، ومن ثم الإبقاء على الطلاب منتبهين أثناء القيام بأعمال "الصيانة اليومية لحجرة الصف الدراسي".

إجابات إضافية

67a. الإجابة النموذجية:

67b. الإجابة النموذجية:



67c. الإجابة النموذجية:

المستقيم	AB (cm)	AC (cm)	AD (cm)
1	4	2	1
2	6	3	1.5
3	3	1.5	0.75

66. المثابرة تقع مدينة ويلمنجتون بولاية نورث كارولينا عند (34°.3, 77°.9). وهو ما يمثل خط عرض شمالي وخط طول غربي. وتقع مدينة وينستون-سالم في الجزء الشمالي من الولاية عند (36°.1, 80°.2).

a. أوجد خط العرض وخط الطول لنقطة منتصف القطعة المستقيمة بين ويلمنجتون ووينستون-سالم.
(35°.2, 79°.1)

b. استخدم الأطلس أو الإنترنت لإيجاد مدينة قريبة من موضع نقطة المنتصف.
الإجابة النموذجية: فايتفيل

c. إذا كانت وينستون – سالم هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة ولها نقطة نهاية عند ويلمنجتون. فأوجد خط العرض وخط الطول لنقطة النهاية الأخرى. **(37°.9, 82°.5)**

d. استخدم الأطلس أو الإنترنت لإيجاد مدينة قريبة من موقع نقطة النهاية الأخرى.
الإجابة النموذجية: برستونسبورغ، كنتاكي

67. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف العلاقة بين نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة ونقطة المنتصف التي تقع بين نقطة النهاية ونقطة المنتصف. **a–c. انظر الهامش.**

a. **هندسيًا** استخدم مسطرة تقويم لرسم ثلاث قطع مستقيمة مختلفة، وسم نقاط النهاية A و B.

b. **هندسيًا** على كل قطعة مستقيمة، أوجد نقطة منتصف $\overline{AB}$ وسمها بالنقطة C، ثم أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ وسمها بالنقطة D.

c. **جدوليًا** قس وسجل قياس AB و AC و AD لكل قطعة مستقيمة، ونظّم نتائجك في جدول.

d. **جبريًا** إذا كانت $AB = x$، فاكتب تعبيرًا لقياسات AC و AD. $AC = \frac{1}{2}x, AD = \frac{1}{4}x$

e. **لفظيًا** ضع تخمينًا حول العلاقة بين AB وكل قطعة مستقيمة إذا كان عليك الاستمرار لإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة ونقطة منتصف وجدتها سابقًا. **الإجابة النموذجية: إذا تم إيجاد نقاط المنتصف n، فإن أصغر قطعة مستقيمة سيكون لها قياس يبلغ $\frac{1}{2^n}x$.**

72. الإجابة النموذجية: اقسم كل إحداثي لنقطة النهاية التي ليست موجودة في نقطة الأصل على 2. على سبيل المثال، إذا كان للقطعة المستقيمة الإحداثيات (0, 0) و (6, −10)، فإن نقطة المنتصف تقع عند $\left(\frac{-10}{2}, \frac{6}{2}\right)$ أو (−5, 3). باستخدام صيغة نقطة المنتصف، إذا كانت نقطتا النهاية في القطعة المستقيمة هما (0, 0) و (a, b)، فإن نقطة المنتصف هي $\left(\frac{a-0}{2}, \frac{b-0}{2}\right)$ أو $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

68. الكتابة في الرياضيات اشرح العلاقة بين نظرية فيثاغورث وصيغة المسافة. **انظر الهامش.**

69. التبرير هل النقطة التي تقع في ثلث المسافة من (x_1, y_1) إلى (x_2, y_2) تمثل أحيانًا أم دائمًا أم لا تمثل مطلقًا النقطة $\left(\frac{x_1 + x_2}{3}, \frac{y_1 + y_2}{3}\right)$؟ اشرح. **الإجابة النموذجية: أحيانًا: عندما تكون النقطة (x_1, y_1) لها الإحداثيان (0, 0)**

70. التحدي تقع النقطة P على القطعة المستقيمة بين النقطة A (1, 4) والنقطة D(7, 13). المسافة من A إلى P تساوي ضعف المسافة من P إلى D. فما إحداثيا النقطة P؟ **(5, 10)**

71. مسألة غير محددة الإجابة ارسم قطعة مستقيمة وسمها $\overline{AB}$. وباستخدام فرجار ومسطرة تقويم فقط، أنشئ القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ بحيث يكون $CD = 5\frac{1}{4}AB$. اشرح إنشاءك ثم حلله. **انظر الهامش.**

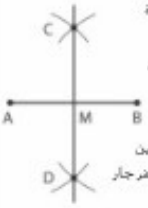
72. الكتابة في الرياضيات اذكر طريقة لإيجاد نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة لها نقطة نهاية واحدة عند (0, 0). اضرب مثالاً باستخدام طريقتك. واشرح سبب نجاح طريقتك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

68. الإجابة النموذجية: تربط نظرية فيثاغورث بين أطوال سيقان المثلث قائم الزاوية وطول وتر المثلث باستخدام الصيغة $c^2 = a^2 + b^2$. فإذا أخذت الجذر التربيعي للصيغة، فستحصل على $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. فكر في وتر المثلث باعتباره المسافة بين النقطتين، حيث قيمة a باعتبارها المسافة الأفقية $x_2 - x_1$، وقيمة b باعتبارها المسافة الرأسية $y_2 - y_1$ فإذا قمت بالتعويض، تصبح نظرية فيثاغورث هي صيغة المسافة $c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

تمرين على الاختبار المعياري

73. أي مما يلي يعطي أفضل وصف للخطوة الأولى في تنصيف $\overline{AB}$؟ **C**



A من النقطة A، ارسم أقواسًا متساوية على $\overline{CD}$ باستخدام عرض الفرجار ذاته.

B من النقطة A، ارسم قوسين متساويين فوق وتحت $\overline{AB}$ باستخدام عرض الفرجار $\frac{1}{3}\overline{AB}$.

C من النقطة A، ارسم قوسين متساويين فوق وتحت $\overline{AB}$ باستخدام عرض للفرجار أكبر من $\frac{1}{2}\overline{AB}$.

D من النقطة A، ارسم قوسين متساويين فوق وتحت $\overline{AB}$ باستخدام عرض للفرجار أقل من $\frac{1}{2}\overline{AB}$.

74. الجبر دفعت هداية AED 74.88 مقابل 3 أزواج من سراويل الجينز. وكانت جميع الأزواج الثلاثة من الجينز بسعر واحد. فكم درهمًا تكلفه كل زوج من الجينز؟ **F**

F AED 24.96
G AED 37.44
H AED 74.88
J AED 224.64

75. SAT/ACT إذا كان $5^{2x-3} = 1$، فإن $x =$ **C**

A 0.4
B 0.6
C 1.5
D 1.6
E 2

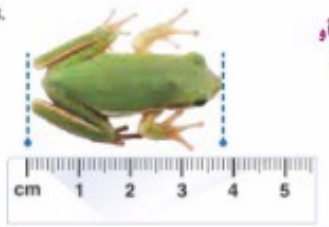
76. إجابة شبكية لإحدى النقطتين الطرفيتين للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ الإحداثيان $(5, -3)$. فإذا كان إحداثيا نقطة منتصف $\overline{AB}$ هما $(-6, 2)$، فما الطول التقريبي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ **24.2**

مراجعة شاملة

أوجد طول كل كائن مما يلي. (الدرس 2-10)

77. **$2\frac{1}{8}$ cm**

78. **38 mm أو 3.8 cm**



ارسم شكلاً لكل علاقة وسمه. (الدرس 1-10) **79–80. انظر الهامش.**

79. $\overrightarrow{FG}$ تقع في المستوى M وتضم النقطة H.

80. يتقاطع المستقيمان r و s عند النقطة W.

مراجعة المهارات

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

81. $8x - 15 = 5x$ **5**

82. $5y - 3 + y = 90$ **15.5**

83. $16a + 21 = 20a - 9$ **7.5**

84. $9k - 7 = 21 - 3k$ **$2\frac{1}{2}$**

85. $11z - 13 = 3z + 17$ **$3\frac{3}{4}$**

86. $15 + 6n = 4n + 23$ **4**

حقوق الطبع والتأليف © لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

حصاد الأمس كلف الطلاب بكتابة فقرة تشرح فيها كيف ساعدهم درس القياس الخطي في الدرس الذي تناول صيغة المسافة ونظرية فيثاغورث وصيغة نقطة المنتصف.

إجابات إضافية

79.

80.

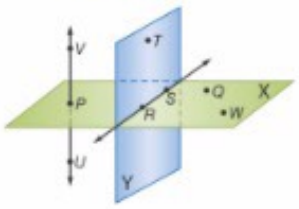
71. الإجابة النموذجية:

ارسم $\overline{AB}$. بعد ذلك، ارسم مستقيمًا إشعاعيًا وضع النقطة C عليه. ومن النقطة C، أخرج ستة أقواس بشكل متتابع بطول AB. وعلى طول $\overline{AB}$ السادس، قم بتنصيف القطعة المستقيمة مرتين لإنشاء طول يبلغ $a\frac{1}{4}AB$. سم نقطة النهاية D.

10 اختبار نصف الوحدة

الدروس من 10-1 إلى 10-4

استخدم الشكل لإكمال كل مما يلي. (الدرس 10-1)



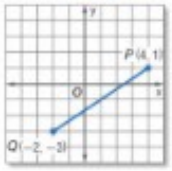
1. حدد نقطة أخرى تقع على استقامة واحدة مع النقطتين U و V. P
2. ما الاسم الآخر للمستوى Y؟ **المستوى RST**
3. عين مستقيمًا يقع في مستوى واحد مع النقاط P و Q و W. $\overleftrightarrow{RS}$

أوجد قيمة x و AC إذا كانت B تقع بين النقطتين A و C. (الدرس 10-2)

4. $AB = 12,\ BC = 8x - 2,\ AC = 10x$ $x = 5;\ AC = 50$
5. $AB = 5x,\ BC = 9x - 2,\ AC = 11x + 7.6$ $x = 3.2;\ AC = 42.8$
6. أوجد DC وإحداثي نقطة منتصف $\overline{CD}$. **14; −2**

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف لكل قطعة مستقيمة. ثم أوجد طول كل قطعة مستقيمة. (الدرس 10-3)

7. $(1, -1);\ 2\sqrt{13} \approx 7.2$



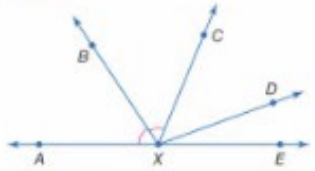
8. $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right);\ 5\sqrt{2} \approx 7.1$

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف لكل قطعة مستقيمة. ثم أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط. (الدرس 10-3)

9. $P(26, 12)$ ، $Q(8, 42)$ **$(17, 27)$؛ $\sqrt{1224}$ أو 35.0**
10. $M(6, -41)$ ، $N(-18, -27)$ **$(-6, -34)$؛ $\sqrt{772}$ أو 27.8**
11. **الخرائط** خريطة لإحدى المدن مرسومة على شبكة إحداثية. وتوجد مدرسة ثانوية عند النقطة $(3, 1)$ ويوجد مجلس المدينة عند النقطة $(-5, 7)$. (الدرس 10-3)
   a. إذا كانت المدرسة الثانوية تقع في نقطة المنتصف بين مجلس المدينة ومكتبة المدينة. فعند أي من الأزواج المرتبة ينبغي أن تجد المكتبة؟ **$(11, -5)$**
   b. إذا كانت وحدة واحدة على الشبكة تساوي 50 مترًا. فكم تبعد المدرسة الثانوية عن مجلس المدينة؟ **500 m**
12. **الاختبار من متعدد** يوجد رأس $\angle ABC$ عند نقطة الأصل. وتوجد النقطة A عند $(5, 0)$ والنقطة C عند $(0, 2)$. كيف يمكن تصنيف $\angle ABC$؟ **C**

A حاد الزاوية	C قائم الزاوية
B منفرج الزاوية	D مختلف الأضلاع

في الشكل، $\overrightarrow{XA}$ و $\overrightarrow{XE}$ عبارة عن شعاعين متقابلين، ويتم قطع $\angle AXC$ من المنتصف بواسطة $\overrightarrow{XB}$. (الدرس 10-4)



13. إذا كانت $m\angle AXC = 8x - 7$ ، $m\angle AXB = 3x + 10$، فأوجد $m\angle AXC$. **101**
14. إذا كانت $m\angle CXD = 4x + 6$ ، $m\angle DXE = 3x + 1$، و $m\angle CXE = 8x - 2$. فأوجد $m\angle DXE$. **28**

صنف كل زاوية على أنها حادة أم قائمة أم منفرجة. (الدرس 10-4)

15. $\angle WQY$ **منفرجة**
16. $\angle YQZ$ **حادة**

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © لصالح مؤسسة

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

اطلب من الطلاب مراجعة الدرس الموضح لكل مسألة تمت إجابتها بشكل غير صحيح.

المطويات منظّم الدراسة

مطويات دينا زايك®

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار نصف الوحدة، شجعهم على مراجعة معلومات الدروس من 10-1 إلى 10-4 المكتوبة في مطوياتهم.